# Formule des compléments

**Définitions/Notations :**

- On note $H := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$
- On rappelle que la fonction gamma notée $\Gamma$ est définie sur $H$ par $\Gamma(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t} \mathrm{d}t$
- La fonction bêta notée $B$ est définie sur $H \times H$ par $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \mathrm{d}t$

**Théorème :** Soit $p \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \mathrm{Re}(p) < 1$. Alors

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{1}{\sin(\pi p)}.$$

**Lemme :** Soit $p, q \in H$. Alors $\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p,q)$.

---

**Preuve du lemme :** On commence par exprimer d'une autre manière $\Gamma(p)$ avec le changement de variable $t = x^2$ ce qui donne

$$\Gamma(p) = 2\int_0^{+\infty} x^{2p-1} e^{-x^2} \mathrm{d}x.$$

Comme $\mathrm{Re}(2p-1) > -1$ on a convergence absolue de l'intégrale donc on peut utiliser le théorème de Fubini-Tonelli pour avoir

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) &= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{2p-1} y^{2q-1} e^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} \rho^{2p+2q-1} \cos(\theta)^{2p-1} \sin(\theta)^{2q-1} e^{-\rho^2} \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(\theta)^{2p-1} \sin(\theta)^{2q-1} \mathrm{d}\theta \times \int_0^{+\infty} 2\rho^{2p+2q-1} e^{-\rho^2} \mathrm{d}\rho = A \times B
\end{aligned}$$

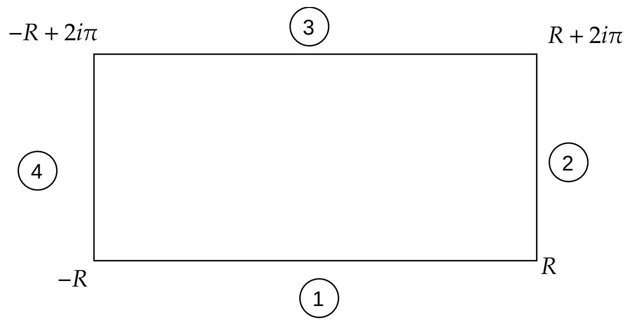
où la deuxième égalité vient du changement de variable en coordonnées polaires classique

$$\varphi : (\rho, \theta) \in ]0, +\infty[ \mapsto (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) \in ]0, +\infty[^2$$

et dont la valeur absolue du jacobien en $(\rho, \theta)$ vaut $\rho$. En faisant le changement de variable $\rho^2 = t$ il vient que $A = \Gamma(p, q)$ et en faisant le changement de variable $\cos(\theta)^2 = t$ il vient que $B = B(p, q)$, d'où le résultat du lemme. $\square$

**Preuve du théorème :** Grâce au théorème de prolongement analytique il suffit de montrer le résultat sur $]0,1[$. Soit donc $p \in ]0,1[$. L'idée va être d'étudier $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{px}}{1+e^x}\mathrm{d}x$ avec le théorème des résidus, puis de relier cette intégrale au résultat que l'on veut.

Posons $f : z \in \mathbb{C} \setminus (2i\pi\mathbb{Z} + i\pi) \mapsto \dfrac{e^{pz}}{1+e^z}$. Cette fonction est clairement holomorphe et possède des pôles simples en les élements de $(2i\pi\mathbb{Z}+i\pi)$. Si $R > 0$ on note $\gamma(R)$ le chemin orienté qui se trouve être le rectangle donc les sommets sont $\{R, R+2i\pi, -R+2i\pi, -R\}$,




et dans la suite on désignera par $\displaystyle\int_i f$ l'intégrale de $f$ sur le segment numéroté $i$. Il est clair avec ce qui a été dit que le seul pôle de $f$ dans le rectangle est $z_0 = i\pi$. On voit d'ailleurs que $(z - i\pi)f(z) = e^{pz}\dfrac{z-i\pi}{1-e^{z-i\pi}} \sim e^{pz}\dfrac{z-i\pi}{-(z-i\pi)} \underset{z\to i\pi}{\to} -e^{pi\pi}$, donc $\mathrm{Res}(f, i\pi) = -e^{pi\pi}$. Le théorème des résidus nous alors que

$$\int_{\gamma(R)} f(z)\mathrm{d}z = -2i\pi e^{pi\pi}.$$

Découpons l'intégrale :

- $\displaystyle\left|\int_2 f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \frac{2\pi e^{pR}}{(e^R-1)} \underset{R\to+\infty}{\to} 0$ car $p - 1 < 0$
- On a le même type de majoration pour $\displaystyle\left|\int_4 f(z)\mathrm{d}z\right|$
- $\displaystyle\int_3 f(z)\mathrm{d}z = -\int_{-R}^{R} f(x+2i\pi)\mathrm{d}z = -\int_{-R}^{R}\frac{e^{2ip\pi}e^{px}}{1+e^{x+2i\pi}}\mathrm{d}z = -e^{2ip\pi}\int_1 f(z)\mathrm{d}z$

d'où en prenant la limite

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = \frac{-2i\pi e^{ip\pi}}{1-e^{2ip\pi}} = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}.$$

Revenons au résultat que l'on veut. On remarque que l'on vient en fait de calculer $B(p, 1-p)$ car $B(p,1-p) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(y)\mathrm{d}y$ grâce aux changements de variable successifs $t = \dfrac{x}{1+x}$ puis $x = e^y$.

Finalement, comme $\Gamma(1) = 1$, on trouve en utilisant le lemme :

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \Gamma(1)B(p,1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}. \square$$

**Remarques importantes :**

- Je suis allé vite sur les changements de variables (c'est long et fastidieux à écrire, flemme), faites les bien de votre côté avant le jour j !
- Je n'ai pas détaillé la remarque sur le prolongement analytique, réfléchissez y un peu, c'est mieux (énoncé exact du théorème, pourquoi nos fonctions sont bien holomorphes, sur quel ouvert etc.)
- C'est un dev compliqué, si vous avec l'impression que ce que j'ai écrit est faux, c'est peut-être le cas ! Comparez avec les autres documents de ce dév pour vérifier !